30/3/2020

Βασικές - επαναληπτικές έννοιες: Στην κλασσική μηχ μπορούμε να βρούμε τα παρακάτω μεγέθη:

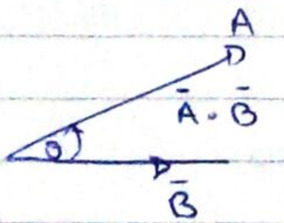
→ Βαθμωτά μεγέθη: (ποσότητες/μεγέθη) που περιγράφονται από ① μόνο τιμή - μόνο από το μέτρο τους
π.χ. μάζα, θερμοκρασία

→ Διανυσματικά μεγέθη: (ποσότητες/μεγέθη) που περιγράφονται από το μέτρο και την κατεύθυνση τους
διεύθυνση → φορά
Στον $\mathbb{R}^3$ τα διανυσματικά μεγέθη έχουν 3 συνιστώσες (x, y, z) π.χ ταχύτητα, επιτάχυνση

→ Τανυστικά μεγέθη: (περιγράφονται από περισσότερες από 3 συνιστώσες π.χ. τανυστής τάσης στα ρευστά/στερεά κλπ

→ Έστω διάνυσμα $A = A_1 \bar{x}_0 + A_2 \bar{y}_0 + A_3 \bar{z}_0$, με $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ εμείς θα τα συμβολίζουμε $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: τα μοναδιαία διανύσματα του καρτεσιανού χώρου και A_1, A_2, A_3 οι ορθογώνιες συνιστώσες του A
Το μέτρο ή μήκος του A είναι: $|A| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$

→ Εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο → Διάνυσμα

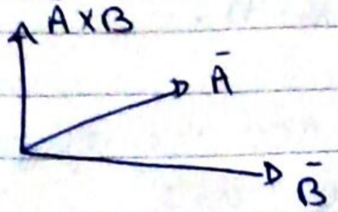


$\bar{A}\cdot\bar{B} = |\bar{A}|\cdot|\bar{B}|\cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$
Αν ξέρω το εσωτ. γινόμενο μπορώ να βρω τη μεταξύ τους γωνία

Γεωμ. ερμηνεία: Το μήκος της προβολής του B πάνω στο A
$\bar{A}\cdot\bar{B}$: βαθμωτό μέγεθος

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = 0 \xRightarrow[\bar{B}\neq 0]{\bar{A}\neq 0} \bar{A}\perp\bar{B}$$

→ Εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο → Αριθμός



$\bar{A}\times\bar{B} = (|\bar{A}||\bar{B}|\sin\theta)\bar{z}_0 \quad , 0\le\theta\le\pi$

Γεωμ. ερμηνεία: το $\bar{A}\times\bar{B}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των A και B και με φορά τέτοια ώστε τα $\bar{A}, \bar{B}, \bar{A}\times\bar{B}$ να σχηματίζουν ένα δεξιόστροφο άξονα

Αν $\bar{A} = A_1\bar{x}_0 + A_2\bar{y}_0 + A_3\bar{z}_0$
$\bar{B} = B_1\bar{x}_0 + B_2\bar{y}_0 + A_3\bar{z}_0$

$$\bar{A}\times\bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \bar{x}_0(A_2B_3 - A_3B_2) - \bar{y}_0(A_1B_3 - A_3B_1) + \bar{z}_0(A_1B_2 - A_2B_1) \text{ : Διάνυσμα}$$

Στο $\bar{A}\times\bar{B}$: δεν αλλάζω τις γραμμές 1η γραμμή τα μοναδιαία
2η -||- στοιχεία του 1ου
3η -||- -||- 2ου

Γενικά: $\bar{A}\times\bar{B} \neq \bar{B}\times\bar{A}$
$\bar{A}\times\bar{B} = -\bar{B}\times\bar{A}$

Το $|\bar{A}\times\bar{B}|$ = εμβαδό του παραλληλογράμμου με πλευρές $\bar{A}$ και $\bar{B}$.

Αν $\bar{A}\times\bar{B} = 0 \xRightarrow[\bar{B}\neq 0]{\bar{A}\neq 0} \bar{A}\parallel\bar{B}$ ($\bar{A}$ παράλληλο στο $\bar{B}$)

→ Μεικτό γινόμενο ή βαθμωτό τριπλό γινόμενο

$\bar{A} = A_1\bar{x}_0 + A_2\bar{y}_0 + A_3\bar{z}_0$
$\bar{B} = B_1\bar{x}_0 + B_2\bar{y}_0 + B_3\bar{z}_0$
$\bar{\Gamma} = \Gamma_1\bar{x}_0 + \Gamma_2\bar{y}_0 + \Gamma_3\bar{z}_0$

$$\bar{A}\cdot(\bar{B}\times\bar{\Gamma}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{vmatrix}$$

Γεωμ. ερμηνεία: παριστάνει τον όγκο παραλληλεπιπέδου με ακμές τα $\bar{A}, \bar{B}, \bar{\Gamma}$ για δεξιόστροφο σύστημα

Ορισμοί

(1) Τελεστής ή Ανάδελτα $\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\bar{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\bar{z}_0}$

Διαφορικός διανυσματικός τελεστής

(2) Βάθμωση ή κλίση: $\boxed{\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{z}_0}$

Διανυσματικό μέγεθος $\to$

(3) Απόκλιση: $\boxed{\text{div}\bar{F} = \bar{\nabla}\cdot\bar{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}}$ βαθμωτό

Μεταβολή της διανυσματικής συνάρτησης στο (x,y,z)

(4) Στροβιλισμός: κάθε σειρά έχει το ρόλο του

$$\text{curl}\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\bar{x}_0 - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\bar{y}_0 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\bar{z}_0$$

Ένα μέτρο του κατά πόσο το διάνυσμα $\bar{F}$ στροβιλίζεται, περιστρέφεται γύρω από σημείο (x,y,z)

Διανυσματικά πεδία

Όταν κινούμαστε στο χώρο χρησιμοποιούμε διανυσματικά μεγέθη για την περιγραφή φυσικών φαινομένων. Πριν αρχίσουμε να μιλάμε για κίνηση πρέπει να έχουμε αίσθηση της κατεύθυνσης!

Ορισμός: Διανυσματικό πεδίο σε μια περιοχή του χώρου ή του επιπέδου είναι η συνάρτηση που αντιστοιχίζει ένα διάνυσμα σε κάθε σημείο της περιοχής αυτής. Γράφουμε:

$$\vec{F}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\hat{i} + f_2(x,y,z)\hat{j} + f_3(x,y,z)\hat{k}$$

Γνωστές οι f_1, f_2, f_3

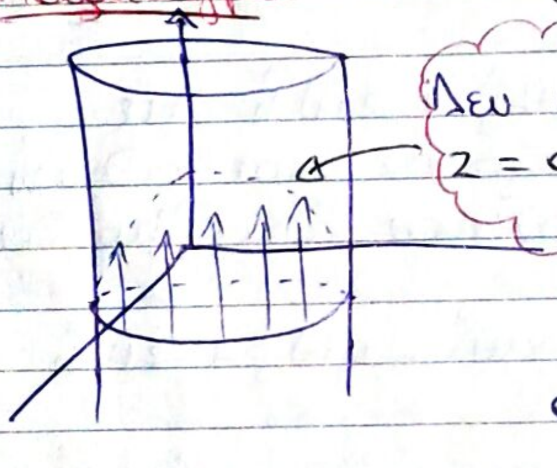
ή

$$\vec{F}(x,y) = f_1(x,y)\hat{i} + f_2(x,y)\hat{j} \quad \text{στο επίπεδο}$$

→ Το πεδίο είναι συνεχές αν οι συναρτήσεις f_1, f_2, f_3 είναι συνεχείς, παραγωγίσιμο αν -||- παραγωγίσιμες κτλ. π.χ. το βαρυτικό πεδίο της Γης: $\vec{F} = GM(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) / (x^2+y^2+z^2)^{3/2}$

Παράδειγμα: Ροή υγρού σε κυλινδρικό σωλήνα.

$$\vec{v} = (a^2 - r^2)\hat{k}$$



Δεν έχω συνιστώσες ως προς ~~z~~ x και y
$z = a^2 - r^2$ γιατί δε θέλω κίνηση προς τα εκεί

Επίσης, για κάθε συνάρτηση (διαφορίσιμη) μπορούμε να ορίσουμε ένα διανυσματικό πεδίο

Ορισμός: Το πεδίο κλίσης μιας διαφ/μης συνάρτησης $f = f(x,y,z)$ είναι το πεδίο των διανυσμάτων κλίσεως

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\nabla} f = \frac{df}{dx}\hat{i} + \frac{df}{dy}\hat{j} + \frac{df}{dz}\hat{k}}$$

Αν ξέρω το $\vec{F}$ μπορώ να βρω το f? Ναι, υπό προϋποθέσεις

παράδειγμα $f = f(x,y,z) = xy \cdot z$ τότε:
$\vec{F} = \vec{\nabla} f = yz\hat{i} + xz\hat{j} + xy\hat{k}$

Απο μια βαθμωτή συνάρτηση f μπορώ να φτιάξω ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$. από ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ πιθανό μπορώ να φτιάξω μια f

* Σε κάθε σημείο της τροχιάς ενός σώματος αντιστοιχούμε το διάνυσμα της ταχύτητας του που αντιστοιχεί σε ένα διανυσματικό πεδίο. Επίσης θα δούμε ότι κίνηση μπορεί να υπάρξει λόγω της ύπαρξης ενός πεδίου στο χώρο.
π.χ. το βαρυτικό πεδίο. Αν αφήσω να πέσει κάτι προς τα κάτω

Κίνηση υλικού σημείου

Όταν ένα σωματίδιο κινείται στον χώρο κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος. Θεωρούμε τις συντεταγμένες του ως συναρτήσεις του χρόνου.
Δηλαδή,

Δίνω χρόνο → παίρνω τη θέση

$(x,y,z) = (x(t), y(t), z(t))$

Τα σημεία (x,y,z) απαρτίζουν μια καμπύλη στο χώρο που καλείται τροχιά του σωματιδίου. (*)

Το διάνυσμα $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ με αρχική θέση την αρχή των αξόνων και τελική τη θέση του σωματιδίου καλείται διάνυσμα θέσης

Η παράγωγος $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} + \dot{z}(t)\hat{k}$

ονομάζεται διάνυσμα ταχύτητας του σωματιδίου, και είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη τροχιάς του

(*) Πώς θα βρω την τροχιά? Είναι μια παραμετρική καμπύλη στο χώρο με παράμετρο το t: χρόνο #

$\boxed{(x(t), y(t), z(t))}$

Η δεύτερη παράγωγος $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \ddot{\vec{r}} =$
$= \ddot{x}(t)\hat{i} + \ddot{y}(t)\hat{j} + \ddot{z}(t)\hat{k}$ είναι το διάνυσμα της επιτάχυνσης

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\boxed{\hat{r} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$ καθορίζει τη φορά (κατεύθυνση) της κίνησης. Δηλαδή η ταχύτητα ενός σωματιδίου είναι:

$\vec{v} = |\vec{v}| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = |\vec{v}|\hat{r}$.

Ένα μέτρο και μια κατεύθυνση

παράδειγμα Ένα σωματίδιο κινείται στην ελλειπτική τροχιά $\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1$ του επιπέδου yz. Ν.β. η θέση του όταν έχει μέγιστη ταχύτητα και μέγιστη επιτάχυνση.

Λύση:

Το διάνυσμα θέσης είναι $\vec{r}(t) = (3\cos t)\hat{j} + (2\sin t)\hat{k}$ (y, z)

ώστε: $\vec{v}(t) = (-3\sin t)\hat{j} + (2\cos t)\hat{k}$ και

$\vec{a}(t) = (-3\cos t)\hat{j} + (-2\sin t)\hat{k}$

$|\vec{v}|^2 = 9\sin^2 t + 4\cos^2 t = 9\sin^2 t + 4 - 4\sin^2 t = 5\sin^2 t + 4$ $(*)^2$

$|\vec{a}|^2 = 9\cos^2 t + 4\sin^2 t = 5\cos^2 t + 4$

$t = \pi/2$: μέγιστη ταχύτητα $|\vec{v}| = \sqrt{5+4} = 3$

$\vec{r}(\pi/2) = 2\hat{k}$

Αν βάλω $t = \pi/2$ στην $(*)^2$ βρίσκομαι στο μέγιστο σημείο της έλλειψης.

(Πότε το sint είναι μέγιστο? Για $t = \pi/2$, άρα τότε έχω μέγιστη ταχύτητα)

$t = 0$: μέγιστη επιτάχυνση $|\vec{a}| = \sqrt{5+4} = 3$

ομοίως

$\vec{r}(0) = 3\hat{j}$ κορυφή οριζόντιο άξονα → μέγιστη $\vec{a}$

(*) Πώς βρέθηκε? και σε ποια τροχιά κινείται?

Δίνω τροχιά μου δίνεις θέση. Δίνω θέση παίρνω τροχιά?

παράδειγμα: Να δείξετε ότι αν τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι κάθετα $\forall t$, τότε το σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ (1) δηλαδή,

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k})(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}) =$$

$$= \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = 0 \xrightarrow{\text{ολοκληρώνουμε}} \frac{(\dot{x})^2}{2} + \frac{(\dot{y})^2}{2} + \frac{(\dot{z})^2}{2} =$$

$$= \tilde{c}^2 \Rightarrow (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2 = c^2$$

Όμως $|\vec{v}| = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} = \sqrt{c^2} = c$

Αν το $|\vec{v}| = c$: σταθ μπορώ ν. βγάλω το συμπέρασμα ότι τα $\vec{v}, \vec{a}$ είναι κάθετα? Κάθε φορά που θα έχω σταθ $\vec{v}$ θα χρησιμοποιώ την (1). Αν $\vec{v} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{v}$: σταθ.
Αν $\vec{v}$: σταθ $\Rightarrow$ είναι τα $\vec{v}, \vec{a}$ κάθετα?

- Με βάση αυτά τα φυσικά μεγέθη μπορούμε να βρούμε και άλλα χαρακτηριστικά της κίνησης.